

Epreuve sur dossier du CAPES externe de mathématiques, session 2007

(ORAL 2)

Ce document contient la liste des dossiers proposés aux candidats passant le second oral du CAPES externe 2007, telle qu'elle a été publiée sur le site officiel du Jury de l'époque. Des questions du jury concernant ces dossiers ont été rassemblées par ordre chronologique dans le livre intitulé "Questions du jury d'oral du CAPES mathématiques & réflexions sur la préparation" (auteurs : Fabien Herbaut et Dany-Jack Mercier) paru en 2010. Ce document permet d'avoir accès aux sujets donnés à l'époque.

Pour me contacter : dany-jack.mercier@hotmail.fr.
Pour surfer sur MégaMaths (Prépa CAPES) : http://megamaths.perso.neuf.fr/ (en 2010).

[0] [epreuvesurdossier2007]

Sujets de l'épreuve sur dossier 2007

Sujet donné le	Thème	
29 Juin	Fonctions	Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples.
30 Juin	Outils	Les triangles isométriques et les triangles de même forme (triangles semblables)
1 Juillet	Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, …)	
2 Juillet	Probabilités	
3 Juillet	Intégration	Calcul d'intégrales par des méthodes variées.
4 Juillet	Outils	Les transformations
5 Juillet	Arithmétique	
6 Juillet	Techniques de dénombrement	
7 Juillet	Problèmes de calculs de grandeurs.	Calcul de longueurs, d'aires et de volumes.
11 Juillet	Fonctions	
12 Juillet	Outils : les transformations	
13 Juillet	Arithmétique	
14 Juillet	Probabilités	Variables aléatoires
15 Juillet	Suites	
16 Juillet	Problèmes de construction	
17 Juillet	Outils	Les triangles isométriques et les triangles de même forme (triangles semblables)
18 Juillet	Suites	Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites.
19 Juillet	Statistiques	
20 Juillet	Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, …)	
21 Juillet	Systèmes linéaires	

Thème : Fonctions
Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier les variations des fonctions g et h définies sur l'ensemble des réels respectivement par :

$$g(x) = x - \sin(x) \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)$$

2. Déterminer le signe de ces deux fonctions sur $[0;+\infty[$.
3. Prouver que pour tout x réel positif on a : $0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \dfrac{x^3}{6}$
4. Démontrer que pour tout réel x strictement positif on a : $-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0$.
   Que peut-on en déduire pour f ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ Analyser la méthode utilisée dans cet exercice.

$Q.2)$ Proposer une nouvelle formulation de la première question pour faciliter sa résolution par des élèves de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question $Q.2)$
- Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Fonctions : Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. Fonction dérivée. Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable ; approximation affine associée à la fonction.		Dans les cas usuels, la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'obtient après transformation d'écriture, en invoquant des arguments très proches de l'intuition. On ne soulèvera aucune difficulté à leurpropos et on admettra tous les résultats utiles. La notion de développement limité à l'ordre 1 n'est pas au programme. On pourra cependant évoquer le caractère optimal de l'approximation affine liée à la dérivée.

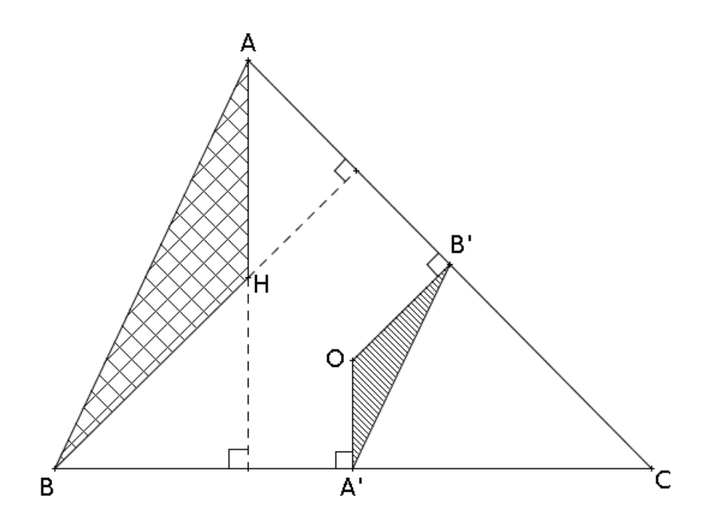
Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Rappel de la définition de la limite d'une suite. Extension à la limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$.	Pour exprimer que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, on dira que : « tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand ».	Il s'agit de prolonger le travail fait en première sur les suites. L'expression « pour x assez grand" est l'analogue pour les fonctions de l'expression »à partir d'un certain rang" pour les suites.
Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel a.	On montrera qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini. On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme $ax+b+h(x)$, où h est une fonction tendant vers 0 à l'infini. On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou sur tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées.	Pour les limites en un réel a, aucune définition n'est exigée : on reprendra l'approche intuitive adoptée en classe de première. Sur un exemple, on fera le lien entre limite en un réel a et à l'infini. On pourra parler de limite à droite ou à gauche à l'occasion de certains exemples.
Théorème « des gendarmes »pour les fonctions.	On démontrera ce théorème lorsque la variable tend vers l'infini. On étendra ce théorème au cas des limites infinies.	

Thème : Outils
Les triangles isométriques et les triangles de même forme (triangles semblables)

1. L'exercice proposé au candidat

Soit ABC un triangle quelconque. On note A' et B' les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CA]$, H l'orthocentre de ABC et O le centre du cercle circonscrit à ABC.
Montrer que $AH = 2OA'$ et $BH = 2OB'$.



Une solution de cet exercice a été rédigée de la façon suivante :

« les triangles AHB et $A'OB'$ ont leurs côtés respectifs deux à deux parallèles donc ils sont semblables. Or $\dfrac{AB}{A'B'} = 2$ donc $AH = 2OA'$ et $BH = 2OB'$ »

Justifier cette solution en la détaillant.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu pour compléter la rédaction de l'exercice proposé.

Q.2) Rédiger la justification demandée dans l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question Q.2)

(ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **«Outils : Les triangles isométriques et les triangles de même forme (triangles semblables)»**.

3. Quelques références aux programmes

Programme de seconde

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Triangles isométriques, triangles de même forme.	Reconnaître des triangles isométriques Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non. On pourra utiliser la définition suivante : « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre »(il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque,...).

Thème : Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, ...)

1. L'exercice proposé au candidat

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)$$

1) On suppose que u_0 est un entier, que peut-on dire de la suite (u_n) ?
2) On suppose que u_0 n'est pas entier, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.
3) On suppose que $u_0 \in]0, 1[$. Existe-t-il un rang à partir duquel la suite est monotone ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Citer différents types de raisonnement intervenant dans votre résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer un corrigé de la question 2) pouvant être présenté à une classe de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– sa réponse à la question *Q*.2),
– les énoncés d'un ou deux exercices sur le thème « **Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, ...)** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première et de Terminale S

Généralités à propos d'une formation scientifique en première et en terminale S

[...] La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes, a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France. Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations.

Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,...).

La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale.

La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est à valeurs positives).

C'est à l'enseignant de guider au coup par coup cette évolution délicate. Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important d'une formation scientifique. La rédaction est l'occasion de revenir sur un raisonnement, de le remodeler, de le rendre plus rigoureux et esthétique, de chercher les meilleures notations, de dégager les idées essentielles de l'aspect technique ; c'est ainsi que pour l'élève, des connaissances éparses se fondent en un ensemble cohérent de savoirs, et que se développent des compétences mathématiques fines. Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques. [...]

Classe de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Suites et récurrence		
Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires.
On tire successivement et au hasard trois boules dans cette urne, en respectant le protocole suivant : on remet la boule dans l'urne si elle est noire, on ne la remet pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Construire un arbre de probabilité permettant de répondre aux questions de l'exercice.

Q.2) Utiliser un tel arbre pour répondre à la question 3 de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question Q.1).

ii) L'énoncé d'un ou plusieurs exercice(s) se rapportant au thème : « **Probabilités** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de première scientifique

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Probabilités Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variance, écart-type. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.).	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10; 100; 1000$. On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.).	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.* On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.

Classe de terminale scientifique

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Conditionnement et indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires. Formule des probabilités totales.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes. . .efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités. Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve. Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples.
Lois de probabilités *Exemples de lois continues.* *Lois continues à densité* : – loi uniforme sur $[0; 1]$ – loi de durée de vie sans vieillissement.	Application à la désintégration radioactive : loi exponentielle de désintégration des noyaux.	Ce paragraphe est une application de ce qui aura été fait en début d'année sur l'exponentielle et le calcul intégral.

Thème : Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

L'objectif de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction ln à partir d'un calcul d'aire. On suppose connue la fonction exp et la fonction ln est définie comme réciproque de cette fonction.

1) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Démontrer que les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2) Soit x un réel strictement supérieur à 1. En utilisant les courbes représentatives des fonctions ln et exp, calculer $\displaystyle\int_1^x \ln t \, dt$. En déduire une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) énoncer les propriétés utilisées pour résoudre cet exercice ;

Q.2) rédiger pour des élèves de terminale S un corrigé de la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) sa réponse à la question Q.2) ;

b) d'autres exercices sur le thème « **Calcul d'intégrales par des méthodes variées** ».

3. Quelques références aux programmes

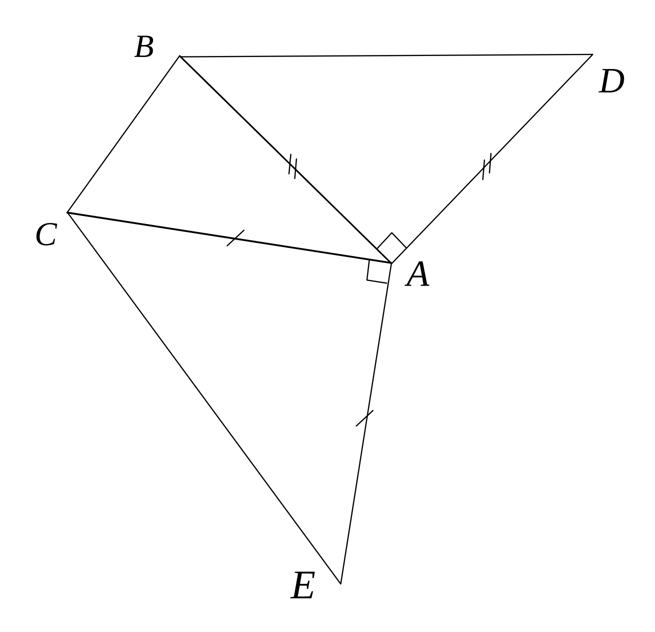
Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a,b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
[...]	[...]	[...]
Intégration et dérivation		
Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a »	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.	L'intégration permet d'établir l'existence des primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.
Calcul de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f.	Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de u'/u, $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$.	L'existence d'une solution de $y' = f(t)$, admise en 1ère est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.
Intégration par parties.		On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.

Thème : Outils
Les transformations

1. L'exercice proposé au candidat

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan est orienté. Soient A, B et C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que les triangles ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A. Le point O est le milieu de $[BC]$.



Construire le point F, symétrique du point C par rapport à A.
En utilisant une rotation de centre A et une homothétie de centre C, montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

Q.1) dégager les méthodes et savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ;

Q.2) présenter une construction de la figure sur la calculatrice, puis une animation permettant d'observer la propriété établie dans l'exercice.

Sur ces fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) sa réponse à la question $Q.1)$;

ii) deux exercices sur le thème : « **Outils : les transformations** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de Première S

Contenus	**Modalités et mise en oeuvre**	**Commentaires**
Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.	Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.

Programme de Terminale S (enseignement de spécialité)

Contenus	**Modalités et mise en oeuvre**	**Commentaires**
Similitudes planes Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\overline{z}+b$ (a non nul).	Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale.	La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\overline{z}+b$; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés.
Etude des similitudes directes	Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.	La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme.
	Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.	On fera le lien avec les triangles semblables ou isométriques introduits en classe de seconde.

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier l'existence des solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation $(E) : x^2 - y^2 = n$, où n est un entier naturel non nul.

1) a) Montrer que (E) admet au moins une solution si et seulement s'il existe deux entiers naturels p et q de même parité tels que $n = pq$ (on pourra utiliser l'identité $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$).

   b) En déduire que si n est un entier impair, (E) admet au moins une solution.

2) Montrer que n est un nombre premier impair si et seulement si le couple $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ est l'unique solution de (E).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Quels aménagements apporteriez-vous à l'énoncé pour l'utiliser dans une classe de terminale scientifique ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).

– L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale S, enseignement de spécialité

L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses ; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement.

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Arithmétique		
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux.	On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.	On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a > b$ (n) ou $a > b$ (modulo n), et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.	L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.
Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.	L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Thème : Techniques de dénombrement

1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un entier n strictement positif.

Dans le plan rapporté à un repère d'origine O, on considère l'ensemble des points $M(x, y)$ avec x, y dans $\mathbb{N}$.

Un pion est initialement placé en O. On effectue de façon aléatoire n déplacements de ce pion selon deux directions possibles, qui sont équiprobables :

– vers le haut, en passant du point de coordonnées (x, y) à celui de coordonnées $(x, y+1)$;

– vers la droite, en passant du point de coordonnées (x, y) à celui de coordonnées $(x+1, y)$.

1) Quel est le nombre de trajectoires possibles ? Décrire l'ensemble A_n des points que peut atteindre le pion à l'issue des n déplacements.

2) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ et soit M le point de A_n d'abscisse k.

   a) Montrer que la probabilité pour que le pion arrive en M au bout de n déplacements est $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ où $\binom{n}{k}$ est le k-ième coefficient binomial d'ordre n.

   b) Sachant qu'à l'issue des n déplacements, le pion est en M, quelle est la probabilité que le premier déplacement du pion ait été vers la droite ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

$Q.2$) Rédiger la correction de la question 2)a) de l'exercice, telle que vous la proposeriez à des élèves.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).

– Deux exercices sur thème « **Techniques de dénombrement** ».

3. Quelques références aux programmes

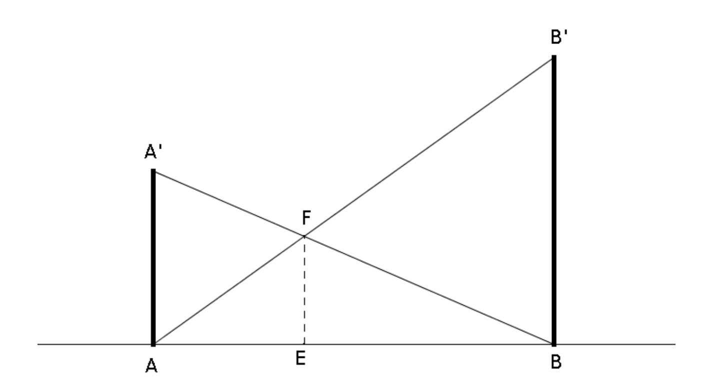
Classe de Terminale S

Contenus	**Modalités de mise en oeuvre**	**Commentaires**
Conditionnement et indépendance		
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels.	
Indépendance de deux variables aléatoires.	On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes... efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.
Formule des probabilités totales.	Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples
Statistique et modélisation. Expériences indépendantes. Cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes.	Application aux expériences de références vues en seconde et première (dés, pièces, urnes...).	On conviendra, en conformité avec l'intuition, que pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.
Lois de probabilité		
Exemples de lois discrètes Introduction des combinaisons, notées $\binom{n}{p}$. Formule du binôme.	On introduira la notation $n!$. L'élève devra savoir retrouver $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.	Le symbole $\binom{n}{p}$ peut être désigné par la locution "p parmi n". Pour les dénombrements intervenants dans les problèmes, on en restera à des situations élémentaires résolubles à l'aide d'arbres, de diagrammes ou de combinaisons.
Loi de Bernoulli, loi binomiale ; espérance et variance de ces lois.	On appliquera ces résultats à des situations variées.	La formule donnant l'espérance sera conjecturée puis admise ; la formule de la variance sera admise.

Thème : Problèmes de calculs de grandeurs
Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

1. L'exercice proposé au candidat

Pour condamner une partie de chantier, des ouvriers plantent verticalement deux poteaux, matérialisés par les segments $[AA']$ et $[BB']$, qu'ils relient par des bandes plastiques, matérialisées par les segments $[AB']$ et $[A'B]$.



La distance EF du point d'intersection des deux bandes au sol leur paraît insuffisante. L'un des ouvriers prétend qu'il suffit de rapprocher les deux poteaux pour augmenter cette hauteur, un autre ouvrier lui répond qu'avec les poteaux dont ils disposent, il est impossible d'augmenter cette hauteur.

Qui a raison ?

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) À l'aide du module de géométrie de la calculatrice, proposer une figure dynamique permettant de conjecturer la réponse à donner à la question posée.

Q.2) Proposer quelques questions intermédiaires qui permettraient à un élève de Collège ou de Seconde de répondre au problème.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question Q.2) ;

(ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de calcul de grandeurs : calculs de longueurs, d'aires et de volumes** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de Quatrième

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Figures planes		
Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes.	Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes : « Dans un triangle ABC où M est un point du côté $[AB]$ et N un point du côté $[AC]$, si (MN) est parallèle à (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ».	L'égalité des trois rapports est admise après avoir été étudiée dans des cas particuliers de rapport. Elle s'étend au cas où M et N sont respectivement sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. Le cas où M et B sont de part et d'autre de A n'est pas étudié. Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de troisième.
Aires et volumes		
Calculs d'aires et de volumes.	Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = \frac{1}{3}Bh$.	La formule donnant le volume de la pyramide peut être justifiée expérimentalement dans des cas simples. L'objectif est, d'une part, d'entretenir les acquis des classes antérieures et, d'autre part, de manipuler de nouvelles formules, en liaison avec la pratique du calcul littéral. Les formules d'aires ou de volumes offrent l'occasion d'étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre. La recherche de l'aire latérale d'une pyramide et d'un cône de révolution est proposée à titre d'exercice.

Programme de Troisième

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Triangle rectangle, relations trigonométriques, distance de deux points dans un repère orthonormé du plan.	Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux côtés du triangle. Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné.	La définition du cosinus a été vue en quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront introduits comme rapports de longueur ou à l'aide du quart de cercle trigonométrique. On établira les formules $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On n'utilisera pas d'autre unité que le degré décimal.
Calculs d'aires et de volumes. Effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes	Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. Calculer le volume d'une boule de rayon donné. Connaître et utiliser le fait que dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, l'aire d'une surface est multipliée par k^2, le volume d'un solide est multiplié par k^3.	Le travail avec un formulaire, qui n'exclut pas la mémorisation, permettra le réinvestissement et l'entretien d'acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes des solides étudiés dans ces classes. Les activités de comparaison d'aires, d'une part, et de volumes, d'autre part, seront autant d'occasions de manipulation de formules et de transformation d'expressions algébriques. Ce travail prend appui sur celui fait en géométrie dans l'espace.

Programme de seconde

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Triangles isométriques, triangles de même forme.	Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non. On pourra utiliser la définition suivante : « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre » (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque...).
Géométrie dans l'espace. Positions relatives de droites et plans : règles d'incidence. Orthogonalité d'une droite et d'un plan.	Manipuler, construire, représenter des solides. Effectuer des calculs simples de longueur, aire ou volume. Connaître les positions relatives de droites et plans de l'espace.	On mettra en œuvre les capacités attendues sur un ou deux exemples : construction d'un patron, représentation en perspective cavalière, dessin avec un logiciel de construction géométrique, calcul de longueurs, d'aires ou de volumes.

Thème : Fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4}}$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que les restrictions de f à chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[4; +\infty[$ sont des fonctions affines.
3) Montrer que sur $[0; 4]$ la représentation graphique de f est un arc de cercle qu'on caractérisera.
4) Tracer (C_f).
5) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Montrer que la courbe (C_f) possède un axe de symétrie.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) Sa réponse à la question Q.2).

(ii) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Calcul et fonctions		
Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1/x$. Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$.	D'autres fonctions telles que $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \lvert x \rvert$, ... pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises. La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant $\mathbb{R}$ » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de $30°$, $45°$ et $60°$.
Fonctions linéaires et fonctions affines.	Caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.	Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, ... ne sont pas linéaires.

Programme de Première S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Généralités sur les fonctions		
Définition d'une fonction polynôme et de son degré. Sens de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u + \lambda$, λu, la fonction u étant connue. Sens de variation de $u \circ v$, u et v étant monotones.	On partira des fonctions étudiées en classe de seconde. Sur des exemples et selon le problème traité, on proposera plusieurs écritures d'une même fonction trinôme, d'une même fonction homographique. On travaillera, à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données u et v : $u + \lambda$,λu, $u + v$, $\lvert u \rvert$, $x \mapsto u(\lambda x)$ et $x \mapsto u(x + \lambda)$.	Les transformations d'écritures s'effectueront à l'occasion des différentes activités de ce chapitre (dérivation, recherche d'asymptotes, résolution d'équations). On remarquera que certaines familles de fonctions sont stables par certaines opérations, pas par d'autres. On remarquera à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle donnant dans tous les cas le sens de variation de $u + v$ ou de uv. On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques.

Programme de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.

Thème : Outils - les transformations

1. L'exercice proposé au candidat

Paul trouve un parchemin dans une bouteille jetée à la mer. Voici ce qui est écrit :

> *« Rends-toi sur l'île du pendu, tu y trouveras une potence.*
>
> *À partir de la potence, dirige-toi vers l'unique chêne de l'île en comptant tes pas. Au chêne, pivote d'un quart de tour vers ta droite et marche le même nombre de pas. Plante un piquet en terre.*
>
> *À partir de la potence, dirige-toi ensuite vers la vieille barque éventrée en comptant tes pas. Arrivé à la barque, pivote d'un quart de tour vers ta gauche et marche le même nombre de pas. Plante à nouveau un piquet en terre.*
>
> *Creuse à mi-chemin entre les deux piquets : le trésor est là. »*

Paul se rend sur l'île du pendu, y trouve le chêne et la vieille barque éventrée, mais, à son grand désespoir, il n'y a plus aucune trace de la potence.
Il part de l'endroit où il se trouve et suit à la lettre les consignes précédentes et trouve le trésor.
A-t-il réellement eu de la chance ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Construire une figure à l'aide du module de géométrie dynamique de la calculatrice et l'animer en déplaçant le point correspondant à la potence pour conjecturer le résultat.

Q.2) Rédiger un énoncé permettant à des élèves de terminale S de localiser le trésor à l'aide d'outils appropriés (isométries du plan ou nombres complexes ou ...).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question *Q*.2) ;

b) l'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : **« Outils - les transformations »**.

3. Quelques références aux programmes

Programme de première scientifique.

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Transformations Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.	Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.

Programmes de terminale scientifique (enseignement de spécialité)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Similitudes planes Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ (a non nul).	Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale.	La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés.
Étude des similitudes directes :	Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'. Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.	La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme. On fera le lien avec les triangles semblables ou isométriques introduits en classe de seconde.

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers compris entre 0 et 25 inclus. Dans cet exercice, chaque lettre de l'alphabet correspond à un élément de $\mathcal{E}$ à l'aide du tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On appelle codage l'application qui associe à chaque lettre de l'alphabet l'entier correspondant, et décodage l'application qui associe à chaque entier de $\mathcal{E}$ la lettre correspondante.

Soient a et b deux entiers. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie par :

Pour tout x appartenant à $\mathcal{E}$, $f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $ax + b$ par 26.

On appelle cryptage affine de clé (a, b) l'application qui associe à chaque lettre de l'alphabet une lettre de l'alphabet de la façon suivante : on code la lettre par un entier x de $\mathcal{E}$, on calcule $f(x)$ puis on décode $f(x)$.

Pour crypter un mot, on crypte chaque lettre.

1) On suppose dans cette question a premier avec 26. Soient x et x' deux éléments de $\mathcal{E}$, montrer que si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.
2) On suppose dans cette question que $\text{PGCD}(a, 26) \neq 1$. Montrer qu'il existe alors au moins deux lettres différentes ayant le même cryptage.
3) On suppose maintenant que $(a, b) = (7, 2)$.
   a) Quel est le cryptage du mot **JOUR** ?
   b) Quel est le mot dont le cryptage est **QCDEY** ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un corrigé de la question 1) pouvant être proposé à une classe de lycée. Dégager, dans le contexte de l'exercice, l'intérêt de cette question.

Q.3) Utiliser la calculatrice pour proposer, dans une classe, une résolution de la question 3).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) Sa réponse à la question Q.2).

(ii) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de la classe de Troisième

Contenus	**Compétences exigibles**	**Commentaires**
Nombres entiers et rationnels		Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.
Diviseurs communs à deux entiers. Fractions irréductibles.	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

Programme de Terminale S Spécialité Math

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Arithmétique		
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux.	On fera la synthèse des connaissances acquises au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décompositions d'un entier en produit de facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.	On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : $a \equiv b \mod n$ ou $a \equiv b \pmod n$ et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication. Toute introduction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.	L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.
Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.	L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage des différents moyens de calcul : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Thème : Probabilités, Variables aléatoires

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2. Une urne U_2 contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

1) On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne (les choix sont supposés équiprobables).
   a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   b) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les six jetons précédents. On tire simultanément et au hasard deux jetons de cette urne. Les tirages sont équiprobables.
   a) Calculer la probabilité de tirer deux jetons portant des numéros identiques.
   b) Soit S la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros des deux jetons tirés. Prouver que la probabilité de l'événement $(S = 4)$ est $\frac{1}{5}$.
   c) Déterminer la loi de probabilité de S, et calculer l'espérance de S.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Réaliser un arbre de probabilités pouvant servir de support à la résolution de la question 1). Donner des explications, accessibles à des élèves, sur cette construction.

Q.2) Préciser les diverses notions utilisées dans l'exercice.

Q.3) Indiquer comment on pourrait réaliser, à l'aide d'un tableur, une simulation du tirage décrit dans la question 1) de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question Q.1).

ii) Deux exercices sur le thème : « **Probabilités, Variables aléatoires** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Statistiques Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement. Simulation et fluctuation d'échantillonnage.	Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir de chiffres au hasard.	La touche « Random » d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de n chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales. Chaque élève produira des simulations de taille n (n allant de 0 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice). Ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille N, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulations de même taille N préparés à l'avance et obtenus à partir de simulations sur ordinateur.

Classe de Première Scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variance, écart-type. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.).	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10\,;\,100\,;\,1000$. On simulera des lois de probabilité simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.).	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.* On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.

Classe de Terminale Scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Conditionnement et indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements. Indépendance de deux variables aléatoires. Formule des probabilités totales.	On justifiera la définition de la probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels. On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes... efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités. Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard.	Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve. Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples.

Thème : Suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit (x_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2^n} \\ x_0 & = & 1 \end{array}\right.$

1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4, en laissant les résultats sous forme fractionnaire.
2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.
4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quels sont les théorèmes mis en œuvre dans votre résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer une étude de la suite (x_n) en introduisant la suite auxiliaire (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 2^n \cdot x_n$.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- L'énoncé d'un exercice établissant les propriétés de la suite (x_n) à l'aide de la méthode de la question Q.2).
- Les énoncés de deux exercices sur le thème « **Suites** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de crois sance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordi- nateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.

Programme de terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites et récurrence		
Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant nu- mérique (avec outils de calcul : calcu- latrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.
	On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de $(u_n - L)$. On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites $u_{n+1} = au_n + b$.	Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.	La notion de suites adjacentes sera introduite en liaison avec le calcul intégral : encadrements d'aires (par exemple aire d'un cercle par la méthode d'Archimède, aire sous une parabole). On montrera le lien avec l'écriture décimale d'un réel.	On fera le lien avec la méthode de dichotomie. L'objectif est d'enrichir la vision des nombres réels et d'indiquer l'importance des suites adjacentes dans le problème de la mesure des grandeurs géométriques ou physiques. L'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ pour approcher une solution de l'équation $f(x) = x$ n'est pas un objectif du programme : la dichotomie, le balayage suffisent au niveau de la terminale pour des problèmes nécessitant de telles approximations.
Théorème de convergence des suites croissantes majorées.		L'équivalence avec le théorème des suites adjacentes pourra faire l'objet d'un problème.

Thème : problèmes de construction

1. L'exercice proposé au candidat

On considère trois points non alignés A, B, C. Pour tout point M de la droite (BC) on définit les droites $\Delta_1(M), \Delta_2(M), \Delta_3(M)$ et les points M_1, M_2, M_3 et $I(M)$ de la manière suivante :

$\Delta_1(M)$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par M ; M_1 est le projeté orthogonal de M sur (AB).
$\Delta_2(M)$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par M_1 ; M_2 est le projeté orthogonal de M_1 sur (AC).
$\Delta_3(M)$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par M_2 ; M_3 est le projeté orthogonal de M_2 sur (BC).
$I(M)$ est le point d'intersection de $\Delta_1(M)$ et de $\Delta_3(M)$.

Le but de l'exercice est de construire l'ensemble E des points M de (BC) tels que $M_3 = M$.

1) Réaliser une figure à l'aide du module de géométrie de votre calculatrice et l'animer de manière à conjecturer la nature de l'ensemble E.
2) On suppose dans cette question que le triangle ABC est rectangle. Montrer que la position de M_3 est indépendante de M et conclure sur l'ensemble E.
3) On suppose dans cette question que le triangle ABC n'est pas rectangle.
   (a) Soient deux points distincts M et N de (BC). Montrer que $I(M)$ est l'image de $I(N)$ par une homothétie de centre A. En déduire que, quand M décrit la droite (BC), le point $I(M)$ est sur une droite fixe Δ passant par A.
   (b) Montrer que le point J intersection de Δ et (BC) est un élément de E.
   (c) Construire l'ensemble E.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
Q.2) Présenter la construction demandée à la question 1) sur l'écran graphique de la calculatrice à l'aide du module de géométrie.
Q.3) Proposer un énoncé plus détaillé de la question 3) (a), permettant sa résolution au niveau d'une classe de première scientifique.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) sa réponse à la question *Q*.1) ;
b) l'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Problèmes de construction** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de cinquième

Contenus	**Compétences**	**Exemples d'activités, commentaires**
3.1. Figures planes Figures simles ou ayant un centre de symétrie ou des axes de symétrie.	Construire, sur papier uni, un parallélogramme donné (et notamment dans les cas particuliers du carré, du rectangle, du losange) en utilisant ses propriétés.	Les connaissances relatives aux quadrilatères usuels sont sollicitées dans des problèmes de construction et permettent de justifier les procédures utilisées pour construire ces quadrilatères. Ces problèmes sont l'occasion de mettre en œuvre droites et cercles et de revenir sur la symétrie axiale et les axes de symétrie. Ils peuvent également être proposés sur papier quadrillé ou pointé.

Accompagnement des programmes - 3^{e}

C. Les constructions géométriques

Les logiciels de construction géométrique permettent la mise en évidence de relations entre les éléments d'une figure ; elles doivent être explicitées par l'élève pour la dessiner. Ces logiciels permettent notamment d'observer une figure sans la reconstruire lorsque l'on déplace par exemple un de ses points, afin de repérer des propriétés conservées et et d'énoncer des conjectures.[...]

Programme de seconde

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Géométrie dans l'espace.	Manipuler, construire, représenter des solides.	On mettra en œuvre les capacités attendues sur un ou deux exemples : construction d'un patron, représentation en persective cavalière, dessin avec un logiciel de construction géométrique.

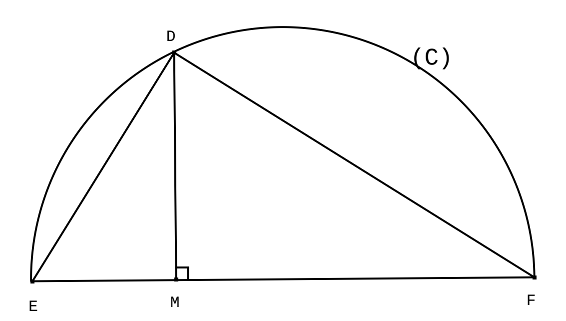
Programme de première scientifique.

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Transformations Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.	Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.

Thème : Outils
Les triangles isométriques et les triangles de même forme

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la figure suivante :



où D est un point de (C) demi-cercle de diamètre $[EF]$ et où (DM) est perpendiculaire à (EF). On pose $EM = a$ et $FM = b$.

1. Montrer que les triangles EMD et DMF sont semblables.
2. En déduire l'expression de DM en fonction de a et b.
3. a) Sur la figure jointe, on a construit dans un repère orthonormal, les points $E(-1, 0)$ et $F(x, 0)$ $(x \geqslant 0)$. Quelles sont, en fonction de x, les coordonnées du point A ? En déduire une construction point par point de la courbe représentative (Γ) d'une fonction usuelle.
   b) Construire sur la figure jointe quelques points de (Γ)

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

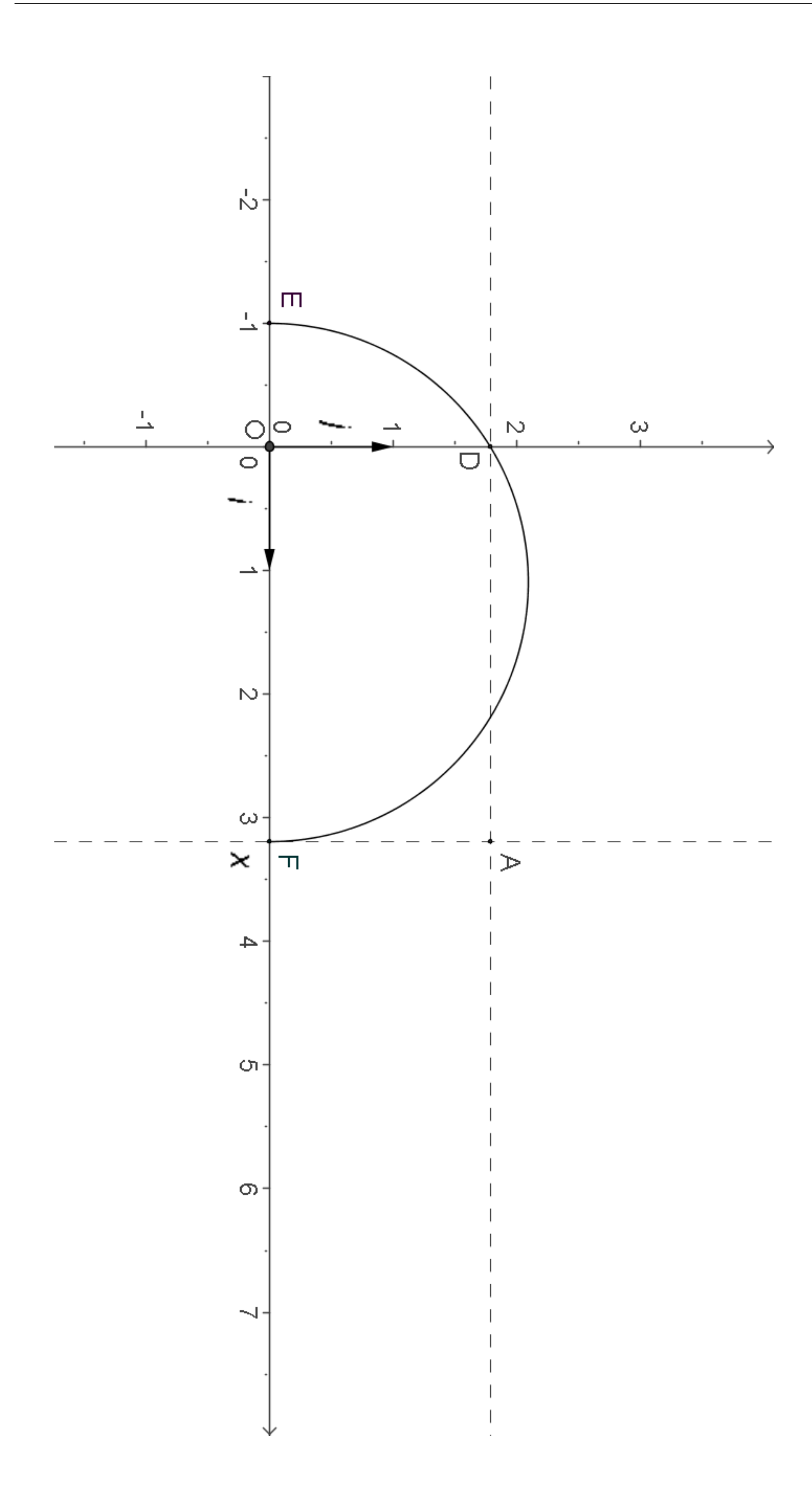
Q.2) Compléter la figure jointe comme demandé dans l'exercice

Q.3) Quelle autre méthode peut permettre d'obtenir l'expression de DM en fonction de a et b ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse aux questions Q.1) et Q.2)

(ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Outils : Les triangles isométriques et les triangles de même forme** ».


E
O
D
A
F

3. Quelques références aux programmes

Programme de Seconde

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Triangles isométriques, triangles de même forme	Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non. On pourra utiliser la définition suivante : «deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre »(il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès,deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement/réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme. Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables. On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque).

Thème : Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites.

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose de donner un sens à l'écriture du nombre $A = 38{,}63636363\ldots$, puis, à l'aide d'un tableur, de retrouver le développement décimal d'un rationnel.

On considère, pour $n \geqslant 1$, la suite numérique de terme général $u_n = 38{,}63\,63\ldots63$ (avec n périodes dans la partie décimale) et on pose $u_0 = 38$.

1. En écrivant u_n sous la forme $u_n = 38 + 63 \cdot 10^{-2} + 63 \cdot 10^{-4} + \cdots + 63 \cdot 10^{-2n}$, démontrer que cette suite est convergente, déterminer sa limite et l'écrire sous forme de fraction irréductible.
   Quel sens peut-on donner à l'écriture du nombre $A = 38{,}63636363\ldots$?
2. Présenter un algorithme simple permettant de retrouver, à l'aide d'un tableur, l'écriture décimale illimitée du nombre rationnel précédent.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Préciser les propriétés utilisées dans la résolution de la première question de cet exercice.

Q.2) Écrire l'algorithme demandé à la question 2).

Q.3) Montrer que toute écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang représente un nombre rationnel.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question Q.2).

ii) Des exercices sur le thème « **Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale L, enseignement de spécialité

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Compléments sur les suites arithmétiques et géométriques		
Sommes des termes successifs d'une suite arithmétique. Sommes des termes successifs d'une suite géométrique	Privilégier la mise en œuvre d'une méthode plutôt que l'application d'une formule.	Disposer de la somme des premiers termes d'une suite géométrique permettra ensuite d'associer à certains décimaux un quotient d'entiers.
Limite d'une suite géométrique de raison positive et conséquences pour la somme des termes consécutifs d'une telle suite.	Les élèves doivent connaître le comportement, suivant les valeurs de q, de q^n lorsque n tend vers l'infini.	Pour aborder cette notion, la démarche expérimentale abordée dans les programmes de première est à conserver : les potentialités d'un tableur (tableau de valeurs, nuage de points) sont à exploiter. Les notions de suite tendant vers l'infini ou de suite convergente ne sont pas à définir de façon formelle.
	Les élèves doivent pouvoir déduire le comportement lorsque n tend vers l'infini d'une expression de la forme $k\dfrac{1-q^n}{1-q}$	Aucune difficulté théorique à propos des opérations sur les limites ne sera soulevée à ce propos. Le comportement lorsque n tend vers l'infini de la somme des n premiers termes de certaines suites géométriques est un exemple de suites croissantes ne tendant pas vers l'infini. C'est une occasion d'évoquer les aspects historique et philosophique de ces questions en présentant quelques paradoxes classiques.
Écriture décimale des nombres réels		
Écriture décimale d'un quotient d'entiers. Caractérisation d'un nombre rationnel.	Les élèves doivent être capables, *sur des exemples*, de : – déterminer l'écriture décimale périodique d'un quotient d'entiers ; – reconnaître un nombre dont la partie décimale est périodique à partir d'un certain rang comme quotient d'entiers.	Les irrationnels apparaissent ici comme des nombres dont le développement décimal illimité n'est pas périodique.

Classe de Première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.
Notion intuitive de limite infinie perçue à partir d'exemples. Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition. Limite d'une suite géométrique.	On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a : *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.* *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.* Démonstration du théorème « des gendarmes » ; les théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis. On pourra mettre la définition en œuvre pour étudier une limite (exemple : suite (w_n) définie par $w_n = max(u_n, v_n)$) ou pour montrer l'unicité de la limite. On montrera avec des exemples la variété de comportement de suites convergeant vers une même limite.	Le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. Toute définition en ε et N est exclue. On indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour cela) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples. La définition d'une limite infinie pourra être abordée ou non.

Classe de Terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Suites et récurrence Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.

Thème : Séries statistiques à deux variables.

1. L'exercice proposé au candidat

Cet exercice provient d'un ouvrage scolaire de terminale.

Le tableau suivant donne, pour douze mois consécutifs, l'évolution des dépenses publicitaires (en milliers d'euros) d'une société commerciale.

Numéro du mois : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Montant des dépenses : y_i	3 000	4 500	3 750	5 250	5 250	6 000	7 500	7 500	8 250	9 750	9 750	10 500

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ correspondant à cette série statistique.
2) Tracer la droite passant par les points $A(1; 3\ 000)$ et $B(9; 8\ 250)$. Déterminer l'équation réduite de cette droite.
3) On utilise cette droite pour réaliser un ajustement affine du nuage des points M_i.
   a) Estimer le montant des dépenses durant le quatorzième mois.
   b) Estimer le rang du mois au cours duquel le montant dépassera pour la première fois 13 000 euros.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) En utilisant l'ajustement affine donné par la méthode des moindres carrés et la calculatrice, répondre aux questions 3)a) et 3)b).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Un ou plusieurs exercices sur le thème : « **Séries statistiques à deux variables** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale STL, SMS, STG toutes séries

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Statistique	Séries statistiques à deux variables quantitatives : tableaux d'effectifs, nuage de points associés, point moyen.	L'ajustement affine par moindres carrés et la corrélation linéaire ne sont pas au programme. Travaux pratiques
	Exemples simples d'étude de séries statistiques à deux variables (croisement de deux caractères d'une population ; ajustement affine par des méthodes graphiques).	Les élèves doivent savoir représenter graphiquement un nuage de points et son point moyen. Pour un ajustement affine par des méthodes graphiques, toutes les indications utiles seront fournies.

Mathématiques et informatique en Première et Terminale ES

On peut souligner deux aspects du lien entre mathématiques et informatique.

— Utiliser des outils logiciels (sur calculatrice ou ordinateur) requiert des connaissances et des compétences mathématiques que cette utilisation contribue en retour à développer. Le programme insiste pour que cet aspect du lien entre mathématique et informatique soit travaillé à tous les niveaux ; il ne s'agit pas d'apprendre à devenir expert dans l'utilisation de tel ou tel logiciel, mais de connaître la nature des questions susceptibles d'être illustrées ou résolues grâce à l'ordinateur et de savoir comment analyser les réponses fournies ; l'élève doit apprendre à situer et intégrer l'usage des outils informatiques dans une démarche scientifique.

— L'informatique a totalement transformé le paysage des mathématiques ; elle permet la confrontation aisée de plusieurs modèles, le calcul effectif de solutions non explicitables d'équations, la pratique de la simulation ; des logiciels mettent à la portée d'un nombre toujours plus grand d'individus des applications de mathématiques sophistiquées, en particulier dans les entreprises. Une évolution des méthodes d'enseignement voire des contenus se fera peu à peu ; s'il est nécessaire de l'amorcer dès aujourd'hui, il convient aussi de réfléchir et d'expérimenter diverses stratégies éducatives. Le programme ne fixe pas de répartition entre différentes modalités qui doivent toutes être présentes : activités des élèves sur ordinateur ou sur calculatrice programmable graphique, travail de la classe entière (ou d'un groupe) utilisant un ordinateur muni d'un dispositif de visualisation collective. Il convient en ce domaine que les professeurs déterminent en chaque circonstance la stratégie d'utilisation la plus adaptée.

Classe de Terminale ES

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Ajustement affine par moindres carrés.	On fera percevoir le sens de l'expression « moindres carrés » par le calcul sur tableur, pour un exemple simple, de la somme : $\sum(y_i - ax_i - b)^2$. On évoquera sur des exemples l'intérêt éventuel et l'effet d'une transformation affine des données sur les paramètres a et b. On étudiera avec des simulations la sensibilité des paramètres aux valeurs extrêmes. On proposera des exemples où une transformation des données conduit à proposer un ajustement affine sur les données transformées. On proposera un ou deux exemples où les points $(x_i; y_i)$ du nuage sont « presque » alignés et où cet alignement peut s'expliquer par la dépendance « presque » affine à une troisième variable.	L'objectif est de faire des interpolations ou des extrapolations. On admettra les formules donnant les paramètres de la droite des moindres carrés : coefficient directeur et ordonnée à l'origine. On traitera essentiellement des cas où, pour une valeur de x, on observe une seule valeur de y (par exemple les séries chronologiques). Le coefficient de corrélation linéaire est hors programme (son interprétation est délicate, notamment pour juger de la qualité d'un ajustement affine). On verra ainsi que pouvoir prédire y à partir de x ne prouve pas qu'il y ait un lien de causalité entre x et y.

Thème : Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...).

1. L'exercice proposé au candidat

Le but de cet exercice est la recherche de tous les entiers naturels n vérifiant la relation

$$(F_n) : \quad n^2 \leqslant 2^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note (P_n) la relation $n < 2^{n-1}$.

1) a) Déterminer si (F_n) est vraie ou fausse pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
   b) Déterminer si (P_n) est vraie ou fausse pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
2) Soit n un entier naturel, montrer que si (F_n) et (P_n) sont vraies alors (F_{n+1}) est vraie.
3) Montrer par récurrence sur n que (P_n) est vraie pour $n \geqslant 3$.
4) Démontrer que (F_n) est vraie pour $n > 3$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

$Q.1$) Dégager les méthodes utilisées dans cet exercice.

$Q.2$) Proposer un autre énoncé permettant d'établir le résultat de la question 4) sans utiliser la propriété (P_n).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question $Q.2$).
- Des exercices sur le thème « **Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...)** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première et de Terminale S

Généralités à propos d'une formation scientifique en Première et en Terminale S.

[...] La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes, a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France. Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations.

Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,...).

La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale.

La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est à valeurs positives).

C'est à l'enseignant de guider au coup par coup cette évolution délicate. Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important d'une formation scientifique. La rédaction est l'occasion de revenir sur un raisonnement, de le remodeler, de le rendre plus rigoureux et esthétique, de chercher les meilleures notations, de dégager les idées essentielles de l'aspect technique ; c'est ainsi que pour l'élève, des connaissances éparses se fondent en un ensemble cohérent de savoirs, et que se développent des compétences mathématiques fines. Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques. [...]

Classe de Terminale S

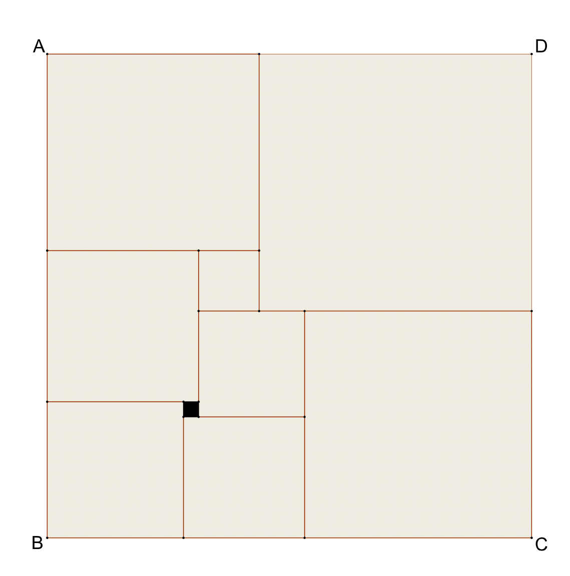
Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Suites et récurrence Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.

Thème : Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener

1. L'exercice proposé au candidat

Le rectangle $ABCD$ ci-dessous a été découpé en carrés. Calculer ses dimensions sachant que le plus petit des carrés, en noir sur le dessin, mesure 2 cm de côté (*on pourra exprimer les côtés des carrés constituant le rectangle $ABCD$ à l'aide du côté du carré ayant B pour sommet*).

Cette figure, reproduite en plus grande taille à la page 4 de ce dossier, sera également disponible sur un transparent auprès du jury.



2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les diverses étapes de la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question $Q.2$).

ii) L'énoncé d'exercices se rapportant au thème : « **Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme du cycle central

Classe de Cinquième

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
2.4. Équations	Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.	Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithme dépourvus de sens. La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. Par exemple, dans l'étude d'une situation conduisant à une égalité telle que $3y = 4x + 2$, les élèves en testent la valeur de vérité pour diverses valeurs de x et de y qu'ils sont amenés à choisir. Ce type d'activité permet de mettre en évidence une nouvelle signification du signe "=". Des situations conduisant à des inégalités sont également étudiées.

Classe de quatrième

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue.	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	Les problèmes issus d'autres parties du programme conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. On dégagera chaque fois sur des problèmes particuliers les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat. Tous les problèmes aboutissant à des équations produits, du type $(x-2)(2x-3) = 0$, sont hors programme.

Programme de Troisième

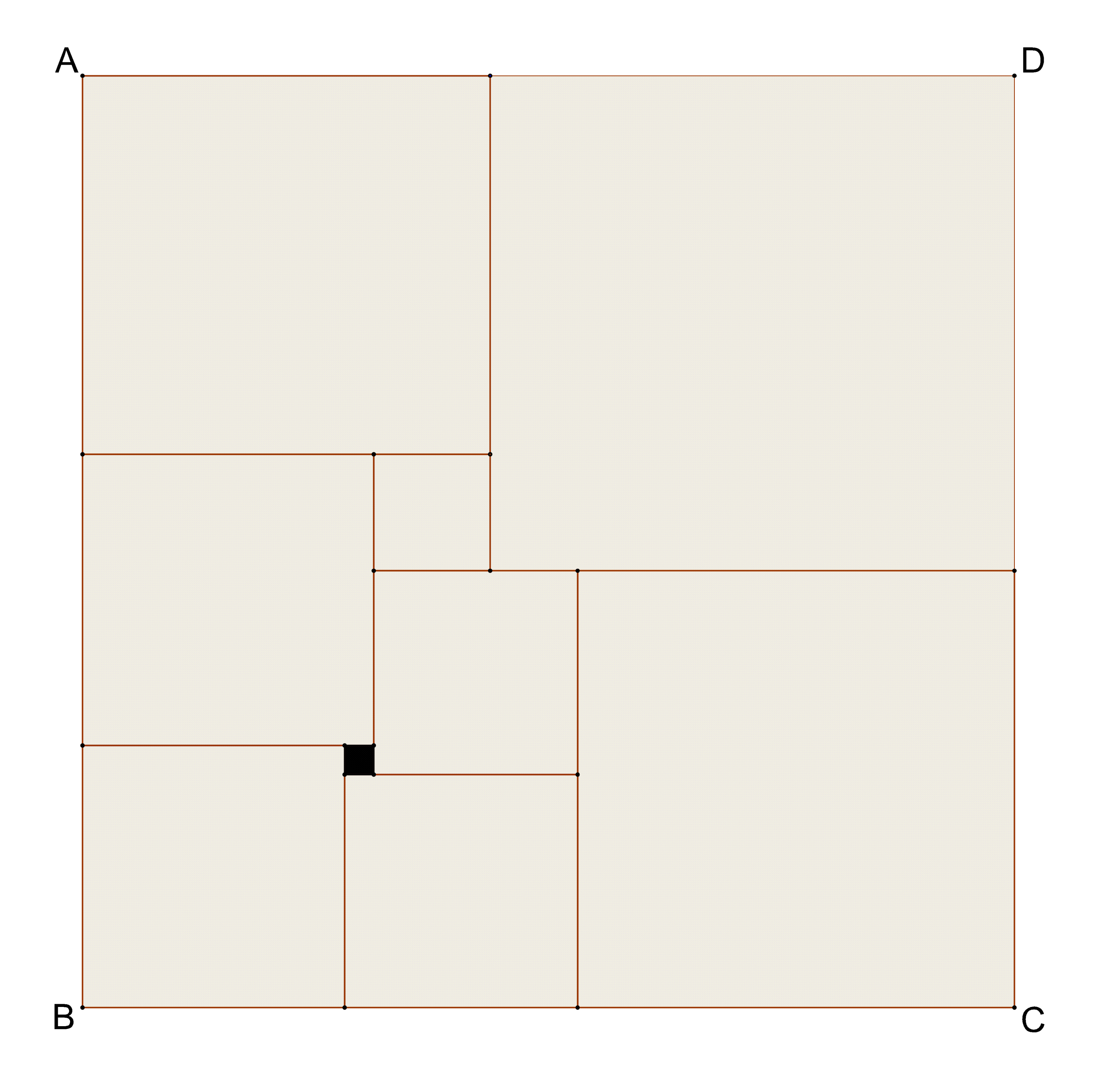
Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Inéquation du premier degré à une inconnue.	Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.	
Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant.	Résoudre une équation mise sous la forme $A \times B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.	L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré est, elle, hors programme. Les problèmes sont issus des différentes parties du programme. Comme en classe de quatrième, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.

Programme de Seconde

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; ...	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Programme de Première S

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Résolution de l'équation du second degré. **Étude du signe d'un trinôme.**	On aboutira ici aux formules usuelles donnant les racines et la forme factorisée d'un trinôme du second degré.	On fera le lien entre les résultats et l'observation des représentations graphiques obtenues à l'aide d'un grapheur.


A
D
B
C